ALBERTO GIUNTA 0000691428

# Esercizio 1

Di seguito la struttura della matrice costruita tramite l’algoritmo di Wilkinson di ordine 10:

Effettuata la fattorizzazione della matrice di Wilkinson di ordine pari a 10 si ha che il valore all’indice (n, n) è pari a 512.

Dopo aver effettuato una perturbazione dello 0,1% di tale indice si ha che il rispettivo valore è pari a 512.5120.

Questo porta a un errore relativo pari al 51,20%.

Contrariamento da quanto visto a lezione qui è stata perturbata solo la matrice R (non anche L), ma anche se il valore per cui essa viene perturbata è piccolo, questo influenza sia L che R secondo la relazione:

delta(A) = delta(L) \* R+ L \* delta(R) + delta(L)\* delta(R)

dalla quale si nota che la variazione di A è tanto maggiore quanto più grossi sono gli elementi dei fattori L e R.

Da ciò si può dedurre la generale non stabilità dell’algoritmo di Gauss.

# Esercizio 2

Di seguito i risultati ottenuti a partire da una matrice di Hilbert di ordine n, fattorizzata tramite l’algoritmo di Gauss.

n Errore Cond(A)

2 0.000000 2.700000e+01

3 0.000000 7.480000e+02

4 0.000000 2.837500e+04

5 0.000000 9.436560e+05

6 0.000000 2.907028e+07

7 0.000000 9.851949e+08

8 0.000000 3.387279e+10

9 0.000007 1.099652e+12

10 0.000110 3.535369e+13

11 0.003051 1.229476e+15

12 0.107738 3.714499e+16

13 1.274864 3.650152e+17

14 23.219389 4.084635e+18

15 1.862891 9.756108e+17

Si può notare che con valori bassi di n si ha un errore praticamente inesistente, essendo la matrice ancora piuttosto ben condizionata. All’aumentare dell’ordine della matrice l’indice di condizionamento cresce esponenzialmente.

L’indice di condizionamento rappresenta un indice di amplificazione sui singoli errori dei dati (che crescono al crescere di n e anche sebbene possano anche essere piccoli possono appunto amplificarsi molto a causa di K), come mostrato dalla relazione:

||delta(x)|| / || x || <= K(A) (||delta(b)|| / || b || + ||delta(A)|| / || A ||

Da qui la deduzione del fatto che all’aumentare dell’ordine della matrice si trattano dei problemi sempre più mal posti. (L’indice di condizionamento di un problema ben posto è pari a 1 circa, e l’errore uguale a 0).

Questo dipende come detto sopra unicamente dalla matrice stessa ed è del tutto indipendente dalla stabilità dell’algoritmo di fattorizzazione usato

La matrice di Hilbert rientra infatti tra gli esempi di matrici mal condizionate viste a lezione.

Si noti anche che superato un errore del 100% (dall’ordine 13 in poi) questo valore diventa assolutamente grande e impredicibile.

# Esercizio 3

**INTERVALLO 0 - 1**

n Errore Cond(A)

2 0.000000 4.000000e+00

3 0.000000 2.400000e+01

4 0.000000 1.800000e+02

5 0.000000 1.400000e+03

6 0.000000 1.080000e+04

7 0.000000 8.624000e+04

8 0.000000 6.726720e+05

9 0.000000 5.405400e+06

10 0.000000 4.241160e+07

11 0.000000 3.414291e+08

12 0.000000 2.688754e+09

13 0.000000 2.165488e+10

14 0.000001 1.709596e+11

15 0.000011 1.376800e+12

**INTERVALLO 0 - 4**

n Errore Cond(A)

2 0.000000 5.000000e+00

3 0.000000 3.750000e+01

4 0.000000 3.300000e+02

5 0.000000 3.540000e+03

6 0.000000 4.739175e+04

7 0.000000 5.764589e+05

8 0.000000 7.876727e+06

9 0.000000 1.012455e+08

10 0.000000 1.404532e+09

11 0.000000 1.863279e+10

12 0.000001 2.613621e+11

13 0.000018 3.539345e+12

14 0.000033 5.006146e+13

15 0.002932 6.878276e+14

In questo caso è stata usata una matrice di Vandermonde, che rientra nei casi di matrici mal condizionate, e quindi come premesse valgono quelle fatte nel caso precedente (riguardo al mal condizionamento di una matrice e a ai problemi mal posti).

In questo caso però differentemente alla matrice di Hilbert si ha che l’indice di condizionamento, e di conseguenza l’errore relativo crescono con una rapidità decisamente minore, si può dire quindi che la matrice di Vandermonde è un problema mal posto, ma non quanto la matrice di Hilbert

Un'altra cosa che si può notare è che l’ampiezza dell’intervallo in cui si calcola la matrice di Vandermonde è di grande rilevanza rispetto all’indice di condizionamento e all’errore relativo che si viene a creare, che sono quindi direttamente proporzionali all’ampiezza dell’intervallo di cui sopra.

# Esercizio 4

**Matrice non perturbata**

Errore Cond(A)

0.000000000 6.240236e+00

**Matrice perturbata del 2% sul termine noto**

Errore Cond(A)

0.007646688 6.240236e+00

Da questi risultati si può notare come anche dopo una perturbazione del 2% su una matrice di tipo A = hilb(12) + eye(12) ovvero una matrice di Hilbert a cui è stata sommata la matrice identità sia molto piccolo rispetto alla stessa perturbazione su una matrice di Hilbert comune.

# Esercizio 5

**Matrice non perturbata**

Errore Cond(A)

0.000000000 6.260800e+04

**Matrice perturbata dello 0.01%**

Errore Cond(A)

0.311625000 6.260800e+04

Qui si può notare come a differenza dell’esercizio precedente, data una perturbazione molto minore (dello 0.01%) si ha un errore relativo decisamente maggiore. Questo dipende ovviamente dal tipo di matrice, che non è stata influenzata dalla matrice identità come nel caso precedente, nonostante l’algoritmo di fattorizzazione fosse lo stesso.